FAISCEAUX PERVERS II

YICHAO TIAN

Au printemps de 2005, Prof. L. Illusie donna un cours sur la cohomologie étale à l'Université Paris-sud. Pour étendre le surjet du cours, il diriga un séminaire d'étudiants. Ce texte est une version révisée d'un exposé oral de ce séminaire, consacré aux propriétés géométriques de la catégorie de faisceaux pervers. Je remercie vivement Prof. L. Illusie, qui m'a appris ce surjet, et qui m'a donné des remarques très instructives.

0. Notation

Dans cet article, on note k un corps, $\overline{k}$ une clôture séparable de k et $\mathcal{S}\mathrm{ch}(\mathrm{k})$ la catgorie des schémas séparés de type fini sur k. Sauf mention expresse du contraire, tout schéma considéré dans cet article est supposé dans $\mathcal{S}\mathrm{ch}(\mathrm{k})$, et tout faisceau sur X est sous-entendu un faisceau étale sur X. Soit X un schéma dans $\mathcal{S}\mathrm{ch}(\mathrm{k})$. On pose $\Lambda = \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ ou $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$, et $D_c^b(X,\Lambda)$ la catégorie dérivée formée par les complexes bornés à cohomologie constructible de Λ-modules sur X.

1. Rappels

1.1. Soit $X \in \mathcal{S}\mathrm{ch}(\mathrm{k})$. Pour $x \in X$, on pose $\mathrm{d}(x) := \dim \overline{\{x\}} = \mathrm{degtr}(k(x)/k)$, et i_x l'immersion canonique $\mathrm{Spec}\, k(x) \xrightarrow{j} \overline{\{x\}} \xrightarrow{i} X$. On dispose de la t-structure sur $D_c^b(X,\Lambda)$ associée à la perversité autoduale :

$$ {}^pD_c^{\leq 0}(X,\Lambda) = \{F \in D_c^b(X,\Lambda) | \forall x \in X, H^q(i_x^* F) = 0, \forall q > -\mathrm{d}(x)\}; $$

$$ {}^pD_c^{\geq 0}(X,\Lambda) = \{F \in D_c^b(X,\Lambda) | \forall x \in X, H^q(i_x^! F) = 0, \forall q < -\mathrm{d}(x)\}, $$

où $i_x^! = j^* i^!$. On définit $\mathrm{Per}(X,\Lambda) = {}^pD_c^{\leq 0}(X,\Lambda) \cap {}^pD_c^{\geq 0}(X,\Lambda)$ la catégorie des faisceaux pervers sur X. C'est une catégorie abélienne.

Remarque 1.2. (1) Pour un faisceau abélien F sur X, on définit

$$ \mathrm{d}(F) = \sup\{\mathrm{d}(x) | F_{\overline{x}} \neq 0\} = \dim \mathrm{Supp}(F). $$

Alors un élément $K \in D_c^b(X,\Lambda)$ appartient à ${}^pD_c^{\leq 0}$ si et seulement si $\mathrm{d}(H^q K) \leqslant -q$ pour tout $q \in \mathbb{Z}$.
(2) Soit $a : X \to \mathrm{Spec}\, k$ le morphisme structural. On pose $K_\Lambda = Ra^!\Lambda$ et $D = R\mathcal{H}om(\_, K_\Lambda)$ le foncteur dualisant. Alors D échange ${}^pD_c^{\leq 0}(X,\Lambda)$ et ${}^pD_c^{\geq 0}(X,\Lambda)$, et induit un anti-automorphisme sur $\mathrm{Per}(X,\Lambda)$.

Date: 22 Juillet 2005.

Exemple 1.3. Supposons X lisse irréductible sur k de dimension d et L un faisceau lisse sur X. Alors $L[d] \in \mathrm{Per}(X,\Lambda)$. En effet, $L[d] \in {}^pD_c^{\leq 0}(X,\Lambda)$ et

$$D(L[d]) = R\mathcal{H}om(L[d],\Lambda[2d](d)) = L^\vee[d](d) \in {}^pD_c^{\leq 0}(X,\Lambda),$$

où $L^\vee = \mathcal{H}om(L,\Lambda)$.

Lemme 1.4. *Supposons $X \in \mathcal{S}\mathrm{ch}(\mathrm{k})$ lisse purement de dimension d, $F \in D_c^b(X,\Lambda)$ tel que $H^i(F)$ soit lisse sur X pour tout $i \in \mathbb{Z}$. Alors ${}^p\tau_{\leq 0}F = \tau_{\leq -d}F$ et ${}^p\tau_{\geq 0}F = \tau_{\geq -d}F$.*

Démonstration. Dans le triangle distingué

$$\tau_{\leq -d}F \to F \to \tau_{\geq -d+1}F \to,$$

il est évident que $\tau_{\leq -d}F \in {}^pD_c^{\leq 0}(X,\Lambda)$. Sous l'hypothèse précédente, on a

$$D(\tau_{\geq -d+1}F) = \mathcal{H}om(\tau_{\geq -d+1}F,\Lambda[2d](d)) = \tau_{\leq -d-1}\,\mathrm{Hom}(F,\Lambda(d)) \in {}^pD_c^{\leq -1}(X,\Lambda).$$

Il en résulte que $\tau_{\geq -d+1}F \in {}^pD_c^{\geq 1}$. Donc ${}^p\tau_{\leq 0}F$ et $\tau_{\leq -d}F$ coïcident, ainsi pour ${}^p\tau_{\geq 0}F$ et $\tau_{\geq -d+1}F$. □

Proposition 1.5. *Soient $X \in \mathcal{S}\mathrm{ch}(\mathrm{k})$ irréductible, $F \in \mathrm{Per}(X,\Lambda)$. Alors il existe un ouvert dense $j : U \hookrightarrow X$, tel que $(U \otimes_k \overline{k})_{red}$ soit lisse sur $\overline{k}$ et que la restriction de F sur $(U \otimes_k \overline{k})_{red}$ s'écrive de la forme $L[\dim U]$, où L est un faisceau lisse sur $U \otimes_k \overline{k}$.*

Démonstration. Soit k^{parf} la clôture parfaite de k contenue dans $\overline{k}$. Alors k^{parf}/k est une extension radicielle, donc le site étale X_{et} coïncide avec $(X_{k^{\mathrm{parf}}})_{et}$. On peut donc supposer k parfait, et X/k intègre de dimension d. Puisque $F \in {}^pD_c^{\leq 0}(X,\Lambda)$, on a $H^i(F_{\overline{\eta}}) = 0$ pour tout $i > -d(\eta) = -d$, où $\overline{\eta} \to \eta \in X$ est un point géométrique générique. Il existe un ouvert lisse U de X tel que la restriction du complexe F à U, notée $F|_U$, soit à cohomologie lisse. En vertu du lemme 1.4, on a $F|_U \in D_c^{\leq -d}(X,\Lambda)$. D'autre part, appliquant l'argument précédent à $DF \in {}^pD_c^{\leq 0}$, on obtient $F|_U \in D_c^{\geq -d}$ quitte à restreindre U. Donc $F|_U$ s'écrit comme $L[d]$, où L est un faisceau lisse sur U. □

2. Prolongements intermédiaires

Soit $f : X \to Y$ un morphisme de $\mathcal{S}\mathrm{ch}(\mathrm{k})$. Dans la suite, nous écrirons simplement $f_* = Rf_*$, $f_! = Rf_!$, $f^! = Rf^!$, et noterons ${}^pf_*$, ${}^pf_!$, ${}^pf^!$, ${}^pf^*$ les foncteurs additifs induits sur les catégories des faisceaux pervers.

Proposition 2.1. *Soit $f : X \to Y$ un morphisme quasi-fini. Alors*
(1) *f_* et $f^!$ sont t-exacts à gauche ;*
(2) *f^* et $f_!$ sont t-exacts à droite.*

Démonstration. Considérons le cas f^*. Pour $K \in {}^pD_c^{\leq 0}(Y,\Lambda)$, on a $\mathrm{d}(H^qK) \leq -q$. Donc

$$\begin{aligned}\mathrm{d}(H^q(f^*K)) &= \mathrm{d}(f^*(H^qK)) = \dim f^{-1}(\mathrm{Supp}H^qK)\\ &\leq \dim(\mathrm{Supp}H^qK) = \mathrm{d}(H^qK) \leq -q.\end{aligned}$$

Ceci montre que $f^*K \in {}^pD_c^{\leq 0}$, et que f^* est t-exact à droite. (f^*, f_*) est un paire de foncteurs adjoints, l'exactitude à droite de f^* équivaut à l'exactitude à gauche de f_*. Comme $Df^* = f^!D$ (*resp.*$Df_* = Df_!$), l'assertion pour f^* (*resp.*f_*) implique celle de $f^!$ (*resp.*f^*). □

Remarque 2.2. Lorsque f est quasi-fini, $f_!$ et f^* sont exacts pour la t-structure naturelle, mais ce n'est pas vrai en général pour la t-structure autoduale.

Corollaire 2.3. *Soit $f : X \to Y$ un morphisme quasi-fini. Alors*
(1) *Si f est fini, $f_! = f_*$ est t-exact ;*
(2) *Si f est étale, $f^* = f^!$ est t-exact.*

Définition 2.4. Soient $f : X \to Y$ un morphisme quasi-fini, et $K \in \mathrm{Per}(X, \Lambda)$. Le morphisme naturel $f_!K \to f_*K$ se factorise canoniquement comme

$$f_!K \to {}^pH^0 f_!K = {}^pf_!K \xrightarrow{\alpha} {}^pf_*K = {}^pH^0 f_*K \to f_*K.$$

On appelle $f_{!*}K := \mathrm{Im}(\alpha) \in \mathrm{Per}(Y, \Lambda)$ *prolongement intermédiaire* de K à Y.

Remarque 2.5. (1) Si on a $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$, il est facile de vérifier que $(gf)_{!*} = g_{!*}f_{!*}$. Autrement dit, le prolongement intermédiaire est compatible à la composition.

(2) Soit $K \to L$ une injection dans $\mathrm{Per}(X, \Lambda)$. Alors le morphisme naturel $f_{!*}K \to f_{!*}L$ est encore injectif. En effet, on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
 & {}^pf_!K \arrow[rr] \arrow[dl] \arrow[dd] & & {}^pf_!L \arrow[dl] \arrow[dd] \\
f_{!*}K \arrow[rr] \arrow[dr] & & f_{!*}L \arrow[dr] & \\
 & {}^pf_*K \arrow[rr] & & {}^pf_*L.
\end{tikzcd}$$

Par le lemme 2.1, on sait que le morphisme ${}^pf_*K \to {}^pf_*L$ est injectif, donc le morphisme composé $f_{!*}K \to {}^pf_*L$ l'est aussi. On en déduit l'injectivité de $f_{!*}K \to f_{!*}L$.

Dualement, si $K \to L$ est surjectif, alors $f_{!*}K \to f_{!*}L$ l'est aussi.

(3) Le foncteur dualisant échange f_* et $f_!$, et transforme image en coimage. Donc on a $Df_{!*} = f_{!*}D$.

Exemple 2.6. Supposons $X \in \mathcal{S}\mathrm{ch(k)}$ purement de dimension d, et k algébriquement clos. On sait qu'il exiiste un ouvert dense $j : U \hookrightarrow X$ tel que U_{red} soit lisse sur k. Donc $\Lambda_U[d] \in \mathrm{Per}(U, \Lambda)$. On définit le *complexe d'intersection de X*

$$\underline{IC}_X := j_{!*}(\Lambda_U[d]).$$

On verra plus tard que cette définiton ne dépend pas du choix de U. Remarquons $D(\underline{IC}_X) = \underline{IC}_X(d)$, en vertu de la remarque 2.5(3).

Rappelons qu'on a dans [BBD]

Proposition 2.7. *Soient $i : Y \to X$ une immersion fermée, $j : U \to X$ l'immersion ouverte complémentaire, $K \in \mathrm{Per}(U, \Lambda)$. Alors*
(1) $j_{!*}K = {}^p\tau^Y_{\leq -1}(j_*K)$, *où* ${}^p\tau^Y_{\leq -1}(j_*K)$ *est donné par le triangle distingué suivant*

$${}^p\tau^Y_{\leq -1}(j_*K) \to j_*K \to i_*{}^p\tau_{\geq 0}i^*j_*K \to .$$

(2) *Soit* $L \in \mathrm{Per}(X,\Lambda)$ *un prolongement de* K *à* $D_c^b(X,\Lambda)$*, i.e.* $L|_U = K$*. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(a) $L = j_{!*}K$ *;*

(b) $i^*(L) \in {}^pD_c^{\leq -1}(Y,\Lambda)$ *et* $i^!(L) \in {}^pD_c^{\geq 1}(Y,\Lambda)$ *;*

(c) ${}^pi^*(L) = 0$ *et* ${}^pi^!(L) = 0$ *;*

(d) *Dans* $\mathrm{Per}(X,\Lambda)$*,* L *n'a pas de quotient à support dans* Y*, ni sous-objet à support dans* Y*.*

Exemple 2.8. Soient $X \in \mathcal{S}\mathrm{ch}(\mathrm{k})$ lisse et purement de dimension d, et $j : U \hookrightarrow X$ un ouvert dense. Si F est un faisceau lisse sur X. Alors on peut vérifier que $j_{!*}(F_U[d]) = F[d]$, en utilisant le critère de la proposition 2.7. En particulier, ceci implique que la définition de $\underline{IC}_X$ dans 2.6 est indépendante de U choisi.

Proposition 2.9. *Supposons* k *parfait, et* $X \in \mathcal{S}\mathrm{ch}(\mathrm{k})$ *un schéma intègre de dimension* d*. Soient* $j : U \to X$ *une immersion ouverte lisse et dense, et* $F = L[d] \in \mathrm{Per}(U,\Lambda)$*, où* L *est un faisceau lisse en* Λ*-modules sur* U*. Alors il existe une suite des ouverts*

$$U = U_0 \xrightarrow{j_1} U_1 \xrightarrow{j_2} U_2 \xrightarrow{j_3} \cdots \xrightarrow{j_n} U_n = X,$$

et des entiers $d_1 > d_2 > \cdots > d_n \geq 0$*, tels que pour* $1 \leq r \leq n$*,* $Y_k = (U_r - U_{r-1})_{red}$ *soit lisse, purement de dimension* d_r *et*

$$(j_{!*}F)|_{U_r} = \tau_{\leq -d_r-1} j_{r*} \cdots \tau_{\leq -d_2-1} j_{2*} \tau_{\leq -d_1-1} j_{1*} F.$$

Démonstration. On fait une récurrence sur r. Supposons qu'on a trouvé $U_0 \hookrightarrow U_1 \hookrightarrow \cdots \hookrightarrow U_{r-1}$, et des entiers $d_1 > d_2 > \cdots > d_{r-1} \geq 0$. On pose $F_{r-1} = (j_{!*}F)|_{U_{r-1}} = j_{[0,r-1]!*}F$, où $j_{[0,r-1]} : U_0 \to U_{r-1}$ est l'immersion naturelle. Il s'agit de trouver $U_r \supset U_{r-1}$ et d_r tels que $(U_r - U_{r-1})_{red}$ soit lisse, purement de dimension d_r et

$$j_{r!*}F_{r-1} = \tau_{\leq -d_r-1} j_{r*} F_{r-1}, \tag{2.9.1}$$

où $j_r : U_{r-1} \hookrightarrow U_r$ est l'immersion naturelle.

On désigne f_{r-1} l'immersion naturelle $U_{r-1} \hookrightarrow X$, et $d_r = \dim(X - U_{r-1})$. Par le théorème de finitude [SGA $4\frac{1}{2}$, finitude], on a $f_{r-1*}F_{r-1} \in D_c^b(X,\Lambda)$. Donc il existe un fermé $Z_r \subset X - U_{r-1}$ de dimension $< d_r$, tel que $(X - U_{r-1} - Z_r)_{red}$ soit lisse purement de dimension d_r et que $f_{r-1*}F_{r-1}$ soit à cohomologie lisse sur $X - U_{r-1} - Z_r$. On pose $U_r = X - Z_r$, obtient un diagramme

$$U_{r-1} \xrightarrow{j_r} U_r \xleftarrow{i_r} Y_r := (U_r - U_{r-1})_{red}$$

des immersions. Il reste à prouver (2.9.1). Par la proposition 2.7, on a

$$j_{!*}F_{r-1} = {}^p\tau_{\leq -1}^{Y_r} j_{r*}F_{r-1},$$

où ${}^p\tau_{\leq -1}^{Y_r} j_{r*}F_{r-1}$ est donné par le triangle distingué

$${}^p\tau_{\leq -1}^{Y_r} j_{r*}F_{r-1} \to j_{r*}F_{r-1} \to i_{r*}{}^p\tau_{\geq 0} i_r^* j_{r*}F_{r-1} \to .$$

Puisque Y_r est lisse purement de dimension d_r et $i_r^* j_{r*}F_{r-1}$ est à cohomologie lisse sur Y_r, on a ${}^p\tau_{\geq 0} i_r^* j_{r*}F_{r-1} = \tau_{\geq -d_r} i_r^* j_{r*}F_{r-1}$, en vue du lemme 1.4. D'autre part, $F_{r-1} \in$

$D_c^{\leq -d_{r-1}-1}(U_{r-1},\Lambda)$. Il en résulte que $i_{r*}\tau_{\geq -d_r} i_r^* j_{r*}F_{r-1} = \tau_{\geq -d_r} j_{r*}F_{r-1}$. On obtient donc

$$ {}^p\tau^{Y_r}_{\leq -1} j_{r*}F_{r-1} \to j_{r*}F_{r-1} \to \tau_{\geq -d_r} j_{r*}F_{r-1} \to, $$

d'où la formule (2.9.1).

□

3. Objets simples

Soit X un schéma dans $\mathcal{S}\mathrm{ch}(\mathrm{k})$.

Théorème 3.1. (1) *La catégorie* $\mathrm{Per}(X,\Lambda)$ *est artinnienne et noethérienne, i.e. tout objet admet une filtration, dont les quotients successifs sont des objets simples de* $\mathrm{Per}(X,\Lambda)$.

(2) *Soit* $j : V \to X$ *une immersion telle que* V *soit irréductible et que* $(V \otimes_k \overline{k})_{red}$ *soit lisse. Soit* L *un faisceau lisse en* Λ*-modules, irréductible sur* V*. Alors* $j_{!*}(L[\dim V])$ *est un faisceau pervers simple sur* X*, et tous les objets simples de* $\mathrm{Per}(X,\Lambda)$ *sont ainsi obtenus.*

Quitte à remplacer k par sa clôture parfaite, on peut supposer k parfait. L'hypothèse que $(V \otimes_k \overline{k})_{red}$ est lisse peut être remplacée par celle que V soit lisse.

Lemme 3.2. *Soient* X *un schéma normal irréductible, et* U *un ouvert non-vide de* X*. Si* F *est un faisceau lisse irréductible sur* X*, alors* $F|_U$ *est encore irréductible.*

Démonstration. On désigne par $\mathfrak{A}$ la catégorie des Λ-faisceaux lisses sur X, et par $\mathfrak{B}$ la catégorie de $\Lambda[\pi_1(X,\overline{\eta})]$-modules de type fini, *i. e.* Λ-modules de type fini munis d'une action continue de $\pi_1(X,\overline{\eta})$, où $\overline{\eta}$ est un point géométrique générique de X. Il est bien connu qu'il existe une équivalence de catégories $\varepsilon : \mathfrak{A} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{B}$ donnée par $F \mapsto F_{\overline{\eta}}$. Un faisceau lisse F sur X est irréductible si et seulement si $F_{\overline{\eta}}$ est un $\Lambda[\pi_1(X,\overline{\eta})]$-module simple. Mais on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \pi_1(U,\overline{\eta}) \arrow[r, "\varphi"] & \pi_1(X,\overline{\eta}) \\ \mathrm{Gal}(\overline{\eta}/\eta). \arrow[u] \arrow[ur, "\psi"'] & \end{tikzcd}$$

Par [SGA1 V.8], le morphisme ψ est surjectif, donc φ l'est aussi. On en déduit que $F_{\overline{\eta}}$ est simple en tant que $\Lambda[\pi_1(U,\overline{\eta})]$-module. On obtient que $F|_U$ est encore irréductible en appliquant l'équivalence précédente pour U. □

Lemme 3.3. *Soient* $X \in \mathcal{S}\mathrm{ch}(\mathrm{k})$ *irréductible et lisse,* L *un faisceau en* Λ*-modules lisse et irréductible. Alors* $F := L[\dim X]$ *est un objet simple de* $\mathrm{Per}(X,\Lambda)$.

Démonstration. Si $G \in \mathrm{Per}(X,\Lambda)$ est un sous-objet de F. Alors par la proposition 1.5, il existe un ouvert $j : U \to X$ tel que $G|_U = M[\dim U]$, où M est un sous-faisceau lisse de $L|_U$. Par le lemme 3.2, on a $M = 0$ ou $M = L|_U$. Donc G ou F/G est à support dans $Y := X - U$. Mais on a $F = j_{!*}(F|_U)$, en vertu de l'exemple 2.8. Donc G ou F/G est sous-objet ou quotient à support dans Y. Utilisant 2.7, on en déduit que $G = 0$ ou $F = G$. Ceci implique que F est un faisceau lisse irréductible. □

Preuve du théorème 3.1. (a) Soient V, X et L comme dans l'hypothèse de 3.1. Si G est un sous-objet de $F := j_{!*}L[\dim V]$, alors G est à support dans $\overline{V}$. Donc on peut supposer $j : V \hookrightarrow X$ ouverte et dense. $G|_V$ est un sous-objet de $L[\dim V]$. On déduit du lemme 3.3 que $G|_V = 0$ ou $G|_V = L[\dim V]$. Ceci implique que G ou F/G est à support dans $X - V$. Utilisant la propositon 2.7, on obtient $G = 0$ ou $F = G$. Ceci montre que F est un objet simple de $\mathrm{Per}(X, \Lambda)$.

(b) On dit qu'un élément $F \in \mathrm{Per}(X, \Lambda)$ possède la propriété (*), s'il est extension successive de faisceaux pervers simples de la forme décrite dans le théorème 3.1(2). On fait une récurrence noethérienne pour montrer que tout faisceau pervers possède la propriété (*). Supposons que tout $G \in \mathrm{Per}(X, \Lambda)$ à support dans un fermé $Z \neq X$ possède la propriété (*). Pour $F \in \mathrm{Per}(X, \Lambda)$ quelconque, il existe un ouvert dense lisse $j : U \hookrightarrow X$ tel que $F|_U = K[\dim U]$, où K est un faisceau lisse sur U. On notera $i : Y = X - U \to X$ l'immersion fermée complémentaire. En vue du triangle distingué $i_* i^! F \to F \to j_* j^* F \to$, on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & i_* {}^pH^0 i^! F \arrow[r] & F \arrow[r, "\alpha"] & {}^pH^0 j_* j^* F \\ & & {}^pH^0 j_! j^* F. \arrow[u] \arrow[ur, "\beta"] & \end{tikzcd}$$

Posons $F_1 = \mathrm{Im}(\beta) = j_{!*} j^* F$ et $F_2 = \mathrm{Im}(\alpha)$. Alors $F_1 \subset F_2$ et F_2/F_1 est à support dans Y. Par l'hypothèse de récurrence, $i_* {}^pH^0 i^! F$ et F_2/F_1 ont la propriété (*).

Pour prouver que F possède la propriété (*), il suffit de le faire pour $F_1 = j_{!*}(K[\dim U])$. On distingue deux cas :

(1) Si K est un faisceau lisse irréductible sur U, la conclusion est triviale.

(2) Si K n'est pas irréductible, alors il existe un sous-faisceau $L \hookrightarrow K$ lisse et irréductible sur U. On obtient une suite exacte de faisceaux pervers

$$0 \to j_{!*} L[\dim U] \to j_{!*} K[\dim U] \to N \to 0.$$

Quitte à rétrécir U, on peut supposer $N|_U = M[\dim U]$, où M est un faisceau lisse sur U de longueur $\mathrm{long}(M) < \mathrm{long}(K)$. Pour prouver $j_{!*} K[\dim U]$ possède la propriété (*), on se ramène à le vérifier pour N, et puis à le faire pour $j_{!*} M[\dim U]$ par le procédé procédent pour F. En répétant ce processus, on se ramène au cas (1). Ceci termine la démonstration du théorème 3.1.

□

4. Estimations des amplitudes cohomologiques

Théorème 4.1 (Artin, SGA4 XIV 3.1)**.** *Soient $f : X \to Y$ un morphisme affine dans $\mathcal{S}\mathrm{ch}(\mathrm{k})$. F est un faisceau abélien de torsion sur X, tel que* $\mathrm{d}(F) = \dim \mathrm{Supp}(F) \leq d$*. Alors* $\mathrm{d}(R^q f_* F) \leq d - q$*.*

Corollaire 4.2. *Soit $f : X \to Y$ un morphisme affine dans $\mathcal{S}\mathrm{ch}(\mathrm{k})$. Alors f_* est t-exact à droite pour la perversité autoduale, et $f_!$ est t-exact à gauche.*

Corollaire 4.3. *Si $f : X \to Y$ est affine et quasi-fini. Alors f_* et $f_!$ sont t-exacts.*

Corollaire 4.4. *Supposons $X \in \mathcal{S}\mathrm{ch}(\mathrm{k})$ affine et k algébriquement clos. Alors pour tout faisceau abélien de torsion F sur X, on a $H^q(X,F)=0$ pour tout $q>\dim X$.*

Exercice 4.5. Soient $j: U \to X$ une immersion ouverte affine, et $i: Y = X - U \to X$ l'immersion compl'émentaire. Alors

(1) pour tout $G \in \mathrm{Per}(U,\Lambda)$, $j_!G$ et j_*G appartiennent à $\mathrm{Per}(X,\Lambda)$;

(2) pour $F \in \mathrm{Per}(X,\Lambda)$, on a $i^*F \in {}^pD_c^{[-1,0]}$ et $i^!F \in {}^pD_c^{[0,1]}$. De plus, on a deux suite exactes de faisceaux pervers

$$0 \to i_*{}^pH^{-1}i^*F \to j_!j^*F \to F \to i_*{}^pH^0i^*F \to 0 \tag{4.5.1}$$

$$0 \to i_*{}^pH^0i^!F \to F \to j_*j^*F \to i_*{}^pH^1i^!F \to 0 \tag{4.5.2}$$

4.6. L'hypothèses sont les mêmes que dans 4.5. Posant $F = j_*G$ dans (4.5.1), on obtient

$$0 \to_* {}^pH^{-1}i^*j_*G \to j_!G \to j_*G \to i_*{}^pH^0i^*j_*G \to 0.$$

Par la définition de $j_{!*}G$, on a

$$0 \to i_*{}^pH^{-1}i^*j_*G \to j_!G \to j_{!*}G \to 0 \tag{4.6.3}$$

$$0 \to j_{!*}G \to j_*G \to i_*{}^pH^0i^*j_*G \to 0 \tag{4.6.4}$$

Appliquant respectivement i^* et $i^!$ à (4.6.3) et (4.6.4), on obtient

$$i^*j_{!*}G = {}^pH^{-1}i^*j_*G[1]$$
$$i^!j_{!*}G = {}^pH^0i^*j_*G[-1]$$

Définition 4.7. Soient D_1, D_2 deux catégories triangulées munies d'une t-structure, et $T: D_1 \to D_2$ un foncteur triangulé. On dit que T est *d'amplitude cohomologique* dans $[a,b](-\infty \le a \le b \le +\infty)$, si $T(D_1^{\le 0}) \subset D_2^{\le b}$ (pour $b \neq +\infty$) et que $T(D_1^{\ge 0}) \subset D_2^{\ge a}$ (pour $a \neq -\infty$), i.e. si $T[b]$ est t-exact à droite et $T[a]$ est t-exact à gauche.

Remarque 4.8. (1) T est t-exact si et seulement si T est d'amplitude 0.

(2) Si T est d'amplitude cohomologique $[a,b]$ et $K \in D_1^{\le 0} \cap D_1^{\ge 0}$, alors $T(K) \in D_2^{[a,b]}$.

Proposition 4.9. *Soit $f: X \to Y$ un morphisme dans $\mathcal{S}\mathrm{ch}(\mathrm{k})$. Supposons que Y soit recouvert par des ouverts affines V tels que $f^{-1}(V)$ soit recouvert par $(d+1)$ ouverts affines. Alors f_* est d'amplitude dans $[-\infty,d]$, et $f_!$ est d'amplitude dans $[-d,+\infty]$.*

Démonstration. Il suffit de montrer l'énoncé pour $f_!$. On peut supposer Y affine et X recouvert par $\mathcal{U} = \{U_0,\cdots,U_d\}$, où chaque U_i est affine. Pour $F \in {}^pD_c^{\ge 0}(X,\Lambda)$, on veut montrer $f_!F \in {}^pD_c^{\ge -d}(X\Lambda)$. On a une résolution de co-cech :

$$\mathcal{C}.(\mathcal{U},F) = (0 \to \mathcal{C}_{-d}(\mathcal{U},F) \to \cdots \to \mathcal{C}_0(\mathcal{U},F) \to 0) \xrightarrow{\sim} F,$$

où

$$\mathcal{C}_{-k}(\mathcal{U},F) = \bigoplus_{0 \le i_0 \le \cdots \le i_k \le d} j_{i_0\cdots i_k !}j^*_{i_0\cdots i_k}F \in {}^pD_c^{\ge 0}(X,\Lambda).$$

On en déduit donc $f_!\mathcal{C}.(\mathcal{U},F) \xrightarrow{\sim} f_!F$. Comme

$$f_!\mathcal{C}(\mathcal{U},F) = \bigoplus (fj_{i_0\cdots i_k})_! j^*_{i_0\cdots i_k}F \in {}^pD_c^{\ge 0}(Y,\Lambda)$$

par le corollaire 4.2, donc $f_!\mathcal{C}.(\mathcal{U},F) \in {}^pD_c^{\geq -d}(Y,\Lambda)$. Ceci montre que $f_!$ est d'amplitude dans $[-d,+\infty]$. $\square$

Proposition 4.10. *Soit $f : X \to Y$ un morphisme de $\mathcal{S}\mathrm{ch}(\mathrm{k})$. Supposons que pour tout $y \in Y$, $\dim f^{-1}(y) \leq d$. Alors on a des estimations d'amplitude cohomologique :*

$$f_! \text{ dans } [-\infty,d]; \quad f^! \text{ dans } [-d,\infty];$$
$$f^* \text{ dans } [-\infty,d]; \quad f_* \text{ dans } [-d,\infty].$$

On procède comme dans la proposition 2.1. Par dualité et adjonction, il suffit de montrer l'énoncé pour f^*. Pour $K \in {}^pD_c^{\leq 0}(Y,\Lambda)$, on a $\mathrm{d}(H^qK) \leq -q$. Alors

$$\mathrm{d}(H^q(f^*K)) = \mathrm{d}(f^*H^qK) \leq \mathrm{d}(H^qK) + d \leq d - q.$$

Ceci démontre l'assertion pour f^*.

Corollaire 4.11. *Supposons la même hypothèse que la proposition 4.10. On a des foncteurs adjoints : $({}^pH^d f_!, {}^pH^{-d} f^!)$ et $({}^pH^d f^*, {}^pH^{-d} f_*)$.*

4.12. Cas particuliers :

(1) Sous les hypothèses de 4.9 ou de 4.10, supposons de plus f propre. Alors $f_! = f_*$ est d'amplitude cohomologique dans $[-d,d]$.

(2) Si f est lisse de dimension relative d, $f^! = f^*[2d](d)$. Donc $f^*[d] = f^![-d](-d)$ est t-exact. On obtient une suite de 3 foncteurs adjoints

$$({}^pH^d f_!(d), {}^pH^d f^*, {}^pH^{-d} f_*).$$

Proposition 4.13. *Si f est lisse de dimension relative d, et à fibres géométriquement connexes non-vides. Alors $f^*[d] : \mathrm{Per}(Y,\Lambda) \to \mathrm{Per}(X,\Lambda)$ est pleinement fidèle.*

Remarque 4.14. Le meilleur résultat de ce type est dans [BBD] section 4, où on démontre que $\mathrm{Per}(Y,\Lambda)$ s'identifie via $f^*[d]$ à une sous-catégorie épaisse de $\mathrm{Per}(X,\Lambda)$.

Lemme 4.15. *Soient $f : X \to Y$ un morphisme lisse à fibres géométriquement connexes non-vides, F un faisceau constructible de Λ-modules sur Y. Alors on a $F \xrightarrow{\sim} {}^0f_*f^*F$, où ${}^0f_*$ désigne le foncteur image directe au sens usuel.*

Démonstration. On sait que F admet une résolution de longueur 1 :

$$0 \to F \to L^0 = \bigoplus_{i=0}^{r_1} i_{t_i*}C_i \to L^1 = \bigoplus_{j=1}^{r_2} i_{s_j*}D_j,$$

où t_i, s_j sont des points géométriques, et les C_i, D_j sont des faisceaux constants. Si on a prouvé le lemme pour L^0 et L^1, le lemme est valable aussi pour F. Donc on peut supposer $F = i_{t*}C$, où $i_t : t \to Y$ est un point géométrique, et C est constant. En vue du diagramme catésien suivant

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "f"] & X_t \arrow[l, "i'_t"'] \arrow[d, "f'"] \\ Y & t, \arrow[l, "i_t"] \end{tikzcd}$$

on obtient
$$^0f_*f^*i_{t*}C \simeq {}^0f_*i'_{t*}f'^*C \simeq i_{t*}{}^0f'_*f'^*C,$$
où le seconde isomorphisme utilise le théorème de changement de base par un morphisme lisse. Comme la fibre géométrique X_t est connexe, on a $i_{t*}{}^0f'_*f'^*C = i_{t*}C$. Ce qui finit la démonstration. $\square$

Lemme 4.16. *Soit $f : X \to Y$ un morphisme de schémas quelconque. Pour tout $K, L \in D^b_c(Y, \Lambda)$, on a un isomorphisme*
$$f^! R\mathcal{H}om(K, L) \xrightarrow{\sim} R\mathcal{H}om(f^*K, f^!L). \tag{4.16.1}$$

On appelle (4.16.1) *l'isomorphisme d'induction*. Pour sa démonstration, on renvoie le lecteur à [SGA4 XVIII 3.1.11].

Preuve de la proposition 4.13. Le foncteur $f^*[d] = f^![-d](-d)$ est t-exact, car f est lisse. Soient $K, L \in \mathrm{Per}(Y, \Lambda)$. Appliquant l'isomorphisme d'induction (4.16.1), on obtient
$$f^* R\mathcal{H}om(K, L) \xrightarrow{\sim} R\mathcal{H}om(f^*K, f^*L). \tag{4.16.2}$$
Appliquant ${}^0f_*H^0$ à (4.16.2), on a
$$^0f_*f^*H^0R\mathcal{H}om(K, L) \xrightarrow{\sim} {}^0f_*H^0R\mathcal{H}om(f^*K, f^*L).$$
Par le lemme 4.15, on a $H^0R\mathcal{H}om(K, L) \xrightarrow{\sim} {}^0f_*f^*R\mathcal{H}om(K, L)$. En appliquant le foncteur $\Gamma(Y, \_)$, on remarque que
$$\Gamma(Y, {}^0f_*H^0R\mathcal{H}om(K, L)) \xrightarrow{\sim} \Gamma(X, H^0R\mathcal{H}om(f^*K[d], f^*L[d])).$$
Comme $\mathrm{Ext}^{-1}(K, L) = Hom(K, L[-1]) = 0$, $R\mathcal{H}om(K, L) \in D^{\geq 0}_c$, c'est le même pour $R\mathcal{H}om(f^*K, f^*L) = R\mathcal{H}om(f^*K[d], f^*L[d])$. Donc on en déduit des isomorphisms de foncteurs
$$\Gamma H^0R\mathcal{H}om \simeq H^0R\Gamma R\mathcal{H}om \simeq H^0R\,\mathrm{Hom} = \mathrm{Hom}\,.$$
Ceci montre que $\mathrm{Hom}(K, L) = \mathrm{Hom}(f^*K[d], f^*L[d])$. $\square$

Références

[BBD] A. Beilinson, J. Bernstein et P. Deligne, *Faisceaux pervers*, Astérisque 100, 1982.