CALCULS DES $\mathcal{E}xt^i$ D'UN GROUPE ET LE MODULE DE DIEUDONNÉ

YICHAO TIAN

Tous les résultats de cet exposé sont dans les chapitres 1 et 2 du livre [BBM]. Je suis très reconnaissant au Prof. Abbes, mon directeur de thèse, pour de nombreuses discussions qui ont amené beaucoup d'améliorations à cet exposé.

1. Rappels sur les grands topos cristallins

1.1. Soient $(\Sigma, \mathcal{J}, \gamma)$ un schéma muni d'un idéal quasi-cohérent à puissances divisées, S un schéma sur Σ tel que p est localement nilpotent sur S, et les puissances divisées γ s'étendent à S.

On note $\mathrm{CRIS}(S/\Sigma)$ la catégorie formée par les triples (U, T, δ) (ou simplement noté (U, T)) vérifiant

(1) T est un schéma sur Σ tel que p est localement nilpotent,

(2) U est un schéma sur S,

(3) il existe une immersion $U \hookrightarrow T$ fermée définie par un idéal nilpotent sur lequel il existe une structure de puissances divisées δ compatible avec les puissances divisées γ.

Un morphisme $(U', T', \delta') \to (U, T, \delta)$ est un couple de morphismes (u, v), où u est un S-morphisme $U' \to U$ et v est un Σ morphisme $T' \to T$, tel que (u, v) est compatible avec la structure de puissances divisées au sens évident.

On peut munir $\mathrm{CRIS}(S/\Sigma)$ de la topologie de Zariski (*resp.* topologie étale, topologie fppf) en considérant comme familles des couvrants les immersions ouvertes surjectives (*resp.* les morphismes étales surjectifs, les morphismes fppf surjectifs). On obtient ainsi le grand topos cristallin de Zariski (*resp.* étale, fppf). On les notera respectivement $(S/\Sigma)_{\mathrm{CRIS},zar}$, $(S/\Sigma)_{\mathrm{CRIS},et}$ et $(S/\Sigma)_{\mathrm{CRIS},fppf}$. Notons qu'il existe des morphismes canoniques de topos

$$(S/\Sigma)_{\mathrm{CRIS},fppf} \to (S/\Sigma)_{\mathrm{CRIS},et} \to (S/\Sigma)_{\mathrm{CRIS},zar}$$

pour lesquels le foncteur image inverse est le foncteur "faisceau associé".

Remarquons que la donnée d'un faisceau F sur $\mathrm{CRIS}(S/\Sigma)_\tau$ est équivalente aux donées suivantes :

(1) pour chaque objet (U, T, δ), un faisceau $F_{(U,T,\delta)}$ sur le petit site T_τ ;

(2) pour tout morphisme $(u, v) : (U', T', \delta') \to (U, T, \delta)$, on dispose d'un morphisme de faisceaux

$$\rho_{(u,v)} : v^{-1}(F_{(U,T,\delta)}) \to F_{(U',T',\delta')},$$

tel que des conditions évidentes de compatibilité aux compositions de morphismes soient vérifiées.

Date: 16 Janvier 2006.

1.2. Soit $(\mathcal{S}ch/S)$ la catégorie des schémas sur S. Considérons la sous-catégorie pleine $(\mathcal{S}ch/S)_\gamma$ de $(\mathcal{S}ch/S)$ formée des S-schéma X tels que les puissances divisées γ s'étendent à X. Soient $\tau = zar, et, fppf$, et $S_{\gamma,\tau}$ le topos des faisceaux sur $(\mathcal{S}ch/S)_\gamma$ pour la topologie τ. Si $Y \to X$ est un morphisme plat et $X \in (\mathcal{S}ch/S)_\gamma$, alors $Y \in (\mathcal{S}ch/S)_\gamma$. On en déduit que les petits sites induits sur $X \in (\mathcal{S}ch/S)_\gamma$ par $(\mathcal{S}ch/S)_\tau$ et $(\mathcal{S}ch/S)_{\gamma,\tau}$ sont égaux.

Pour chaque τ, on a un morphisme canonique de topos $i_{S/\Sigma} : S_{\gamma,\tau} \to (S/\Sigma)_{\mathrm{CRIS},\tau}$ défini par

$$i^*_{S/\Sigma}F(U) = F(U,U) \quad \text{et} \quad i_{S/\Sigma *}G(U,T,\delta) = G(U).$$

Par ailleurs, il est clair qu'on a un diagramme commutatif de morphismes de topos :

$$\begin{tikzcd}
S_{\gamma,fppf} \arrow[r] \arrow[d, "i_{S/\Sigma}"] & S_{\gamma,et} \arrow[r] \arrow[d, "i_{S/\Sigma}"] & S_{\gamma,zar} \arrow[d, "i_{S/\Sigma}"] \\
(S/\Sigma)_{\mathrm{CRIS},fppf} \arrow[r] & (S/\Sigma)_{\mathrm{CRIS},et} \arrow[r] & (S/\Sigma)_{\mathrm{CRIS},zar}.
\end{tikzcd}$$

Notation : Soit X un S-schéma. On notera encore X le faisceau qu'il représente dans $S_{\gamma,\tau}$ $(\tau = zar, et, fppf)$, $\underline{X}$ son image $i_{S/\Sigma *}(X)$ dans $(S/\Sigma)_{\mathrm{CRIS},\tau}$.

Sur l'exactitude des foncteurs $i_{S/\Sigma *}$ on a

Proposition 1.3. (1) *Si $\tau = zar, et$, alors le foncteur $i_{S/\Sigma *}$ est exact sur la catégorie des faisceaux abéliens sur $S_{\gamma,\tau}$.*

(2) *Soit*

$$0 \to G' \to G \to G'' \to 0$$

une suite exacte de faisceaux abéliens dans $S_{\gamma,fppf}$. On suppose que G' soit représenté par un schéma en groupes affine plat de présentation finie sur S. Alors la suite exacte de faisceaux abéliens sur $\mathrm{CRIS}(S/\Sigma)_{fppf}$

$$0 \to \underline{G'} \to \underline{G} \to \underline{G''} \to 0$$

est exacte, soit encore $R^1 i_{S/\Sigma *}(G') = 0$.

(3) *Si $\tau = fppf$ et G est un S-schéma en groupes lisse ou un schéma en groupes commutatif fini, alors pour tout $k \geqslant 1$, on a $R^k i_{S/\Sigma *}(G) = 0$.*

1.4. Maintenant on fixe une topologie $\tau = zar, et, fppf$. Sur $\mathrm{CRIS}(S/\Sigma)$, on note $\mathcal{O}_{S/\Sigma}$ le faisceau structural donné par

$$\Gamma((U,T,\delta), \mathcal{O}_{S/\Sigma}) = \Gamma(T, \mathcal{O}_T),$$

et $\mathcal{J}_{S/\Sigma}$ le l'idéal à puissances divisées canonique de $\mathcal{O}_{S/\Sigma}$, défini par

$$\Gamma((U,T,\delta), \mathcal{J}_{S/\Sigma}) = \mathrm{Ker}(\Gamma(T, \mathcal{O}_T) \to \Gamma(U, \mathcal{O}_U)).$$

Donc par définitions, on a une suite exacte

$$0 \to \mathcal{J}_{S/\Sigma} \to \mathcal{O}_{S/\Sigma} \to i_{S/\Sigma *}\mathcal{O}_S \to 0,$$

où $\mathcal{O}_S$ est le faisceau structurel sur $(\mathcal{S}ch/S)_\gamma$.

1.5. On note respectivement $\tau_i (i = 1, 2, 3)$ la topologie zar, et et $fppf$. Pour $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant 3$, on considère le morphisme de changement de topologies : $\alpha = (\alpha^*, \alpha_*) : (S/\Sigma)_{\mathrm{CRIS},\tau_j} \to$

$(S/\Sigma)_{\mathrm{CRIS},\tau_i}$. Si E est un faisceau sur $\mathrm{CRIS}(S/\Sigma)_{\tau_i}$, alors $\alpha^*(E)$ est par définition le faisceau associé à E considéré comme préfaisceau.

On dit que un faisceau E est un *cristal en $\mathcal{O}_{S/\Sigma}$-modules quasi-cohérents* ou simplement un *cristal quasi-cohérent*, s'il satisfait aux conditions suivantes :

(i) pour tout $(U,T,\delta) \in \mathrm{CRIS}(S/\Sigma)_{\tau_i}$, le faisceau zariskien $E_{(U,T,\delta)}$ est un $\mathcal{O}_T$-module quasi-cohérent ;

(ii) pour tout morphisme $(u,v) : (U',T',\delta') \to (U,T,\delta)$, l'homomorphisme de $\mathcal{O}_{T'}$-modules

$$v^*(E_{(U,T,\delta)}) = \mathcal{O}_{T'} \otimes_{v^{-1}\mathcal{O}_T} v^{-1}(E_{(U,T,\delta)}) \Longrightarrow E_{(U',T',\delta')} \tag{1.5.1}$$

est un isomorphisme.

On définit de façons analogue un *quasi-cristal en $\mathcal{O}_{S/\Sigma}$-modules quasi-cohérents* comme un faisceau vérifiant la conditon (i) ci-dessus et

(ii') pour tout morphisme $(u,v) : (U',T',\delta') \to (U,T,\delta)$ avec le diagramme

$$\begin{tikzcd} U' \arrow[r, "i'"] \arrow[d, "u"'] & T' \arrow[d, "v"] \\ U \arrow[r, "i"] & T \end{tikzcd}$$

cartésien et v fppf, le morphisme (1.5.1) est un isomorphisme.

Remarquons que par définition un cristal en $\mathcal{O}_{S/\Sigma}$ est trivialement un quasi-cristal. Utilisant la théorie de la fpqc descente, on a

Proposition 1.6. *Soit E un faisceau pour la topologie τ_i. Supposons que E soit un quasi-cristal. Alors E est un faisceau pour la topologie $\tau_j (j \geqslant i)$, et pour tout $i > 0$ on a*

$$R^i\alpha_*(E) = 0$$

Grâce à cette proposition, on peut parler d'un quasi-cristal sans préciser la topologie τ.

1.7. Soit $f : X \to S$ un objet dans $(\mathcal{S}ch/S)_\gamma$. Alors f induit un morphisme canonique de topos cristallins

$$f_{\mathrm{CRIS}} : (X/\Sigma)_{\mathrm{CRIS},\tau} \longrightarrow (S/\Sigma)_{\mathrm{CRIS},\tau},$$

tel que le foncteur image inverse f^*_{CRIS} admet la descripiton simple suivante. Soient E un faisceau sur $\mathrm{CRIS}(S/\Sigma)$, (U',T',δ') un objet de $\mathrm{CRIS}(X/\Sigma)$. Par composition, on peut considérer (U',T',δ') comme un objet dans $\mathrm{CRIS}(S/\Sigma)$, noté, $f_!(U',T',\delta')$. Le faisceau $f^*_{\mathrm{CRIS}}(E)$ est défini par

$$\Gamma((U',T',\delta'), f^*_{\mathrm{CRIS}}E) = \Gamma(f_!(U',T',\delta'), E).$$

Grosso modo, f^*_{CRIS} est un foncteur de "réstriction", et on notera souvent $f^*_{\mathrm{CRIS}}E = E|_{(X/\Sigma)_{\mathrm{CRIS}}}$.

1.8. Soit $\pi : S \to \Sigma$ le morphisme structural. On définit pour chaque τ considérée, un morphisme de topos, appelé le morphisme de projection,

$$\pi_{S/\Sigma} : (S/\Sigma)_{\mathrm{CRIS},\tau} \to (\mathcal{S}ch/\Sigma)_\tau,$$

de la manière suivante.

(1) Si E est un faisceau de Σ_τ, $\pi^*_{S/\Sigma}(E)$ est défini par

$$\Gamma((U,T,\delta), \pi^*_{S/\Sigma}(E)) = \Gamma(T, E).$$

(2) Si F est un faisceau sur $\mathrm{CRIS}(S/\Sigma)_\tau$, $\pi_{S/\Sigma*}(F)$ est défini en posant, pour tout Σ-schéma V,

$$\Gamma(V, \pi_{S/\Sigma*}(F)) = \mathrm{Hom}_{(S/\Sigma)_{\mathrm{CRIS},\tau}}(\pi^*_{S/\Sigma}V, F),$$

où on a identifié V au faisceau qu'il représente sur $(\mathcal{S}ch/\Sigma)_\tau$.

Lorsque V est plat sur Σ, les puissances divisées γ s'étendent à V. Posant $S_V = S \times_\Sigma V$, alors on peut montrer que

$$\Gamma(V, \pi_*(F)) = \Gamma(S_V/V, F|_{(S_V/V)_{\mathrm{CRIS}}}).$$

où on a noté $F|_{(S_V/V)_{\mathrm{CRIS}}}$ l'image inverse de F pour le morphisme naturel $(S_V/V)_{\mathrm{CRIS}} \to (S/\Sigma)_{\mathrm{CRIS}}$.

1.9. Supposons à nouveau que $f : X \to S$ soit un objet dans $(\mathcal{S}ch/S)_S$. On va décrire le foncteur image directe $f_{\mathrm{CRIS}*} : (X/\Sigma)_{\mathrm{CRIS},\tau} \to (S/\Sigma)_{\mathrm{CRIS},\tau}$.

Soient E un faisceau sur $\mathrm{CRIS}(X/\Sigma)_\tau$, (U, T, δ) un objet de $\mathrm{CRIS}(S/\Sigma)$, $\mathcal{I}$ d'idéal de U dans T. Posons $\mathcal{I}' = I + \mathcal{J}\mathcal{O}_T$, δ' les puissances divisées sur $\mathcal{I}'$ prolongeant γ et δ, $X_U = X \times_S U$, $f_{X_U/T} : (X_U/T)_{\mathrm{CRIS},\tau} \to (\mathcal{S}ch/T)_\tau$ le foncteur de projection défini plus haut. Alors on peut vérifier qu'il existe un isomorphisme de faisceaux sur le petit site T_τ :

$$f_{\mathrm{CRIS}*}(E)_{(U,T,\delta)} \xrightarrow{\sim} f_{X_U/T*}(E|_{(X_U/T)_{\mathrm{CRIS}}}), \tag{1.9.1}$$

où le terme de droite désigne encore, par abus de notation, la restriction au petit site T_τ de $f_{X_U/T*}(E|_{(X_U/T)_{\mathrm{CRIS}}})$.

La proposition suivante est bien connue :

Proposition 1.10 (**Lemme de Poincaré crisallin**). *Supposons $\tau = zar$, $E = \mathcal{J}^{[k]}_{S/\Sigma}F$, avec $k \geqslant 0$ et F un crisal quasi-cohérent, et qu'il existe un diagramme commutatif*

$$\begin{tikzcd} X_U \arrow[rr, "i"] \arrow[dr] & & Y \arrow[dl, "g"] \\ & T, & \end{tikzcd}$$

où g est lisse et i est une immersion fermée. Notons $\mathcal{D}_Y(X_U)$ l'enveloppe à puissances divisées de X_U dans Y, $\mathcal{J}$ l'idéal à puissances divisées canoniques de $\mathcal{D}_Y(X_U)$, et $\mathcal{F} = F_{(X_U, \mathcal{D}_Y(X_U))}$ sur $(X_U)_{zar}$. Alors on a, pour tout $q \geqslant 0$, un isomorphisme canonique sur le petit site T_{zar} :

$$R^q f_{\mathrm{CRIS}*}(E)_{(U,T,\delta)} \simeq R^q f_{X_U/T*}(E|_{(X_U/T)_{\mathrm{CRIS}}}) \xrightarrow{\sim} R^q g_*(\mathcal{J}^{[k-\cdot]}(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \Omega^{\cdot}_{Y/T})).$$

2. Calculs des extensions

On fixe une topologie $\tau = zar, et, fppf$. Soit $\mathcal{A}b_{S/\Sigma}$ la catégorie des faisceaux abéliens sur $\mathrm{CRIS}(S/\Sigma)$. Si E, E' sont des objets de $\mathcal{A}b_{S/\Sigma}$, on notera $\mathrm{Hom}_{S/\Sigma}(E', E)$ le groupe des homomorphismes de E' dans E dans $\mathcal{A}b_{S/\Sigma}$, et $\mathcal{H}om_{S/\Sigma}(E', E)$ le faisceau des homomorphismes, qui est donc un objet de $\mathcal{A}b_{S/\Sigma}$. Par passage à la catégorie dérivée, on obtient les foncteurs dérivés $R\,\mathrm{Hom}_{S/\Sigma}(\_,\_)$ et $R\,\mathcal{H}om_{S/\Sigma}(\_,\_)$. Leurs objets de cohomologie seront notés respectivement $\mathrm{Ext}^i_{S/\Sigma}$ et $\mathcal{E}xt^i_{S/\Sigma}$.

Proposition 2.1. *Soient $f : X \to S$ un objet dans $(\mathcal{S}ch/S)_\gamma$, et E un faisceau abélien sur* $\mathrm{CRIS}(S/\Sigma)$. *Alors il existe des isomorphismes canoniques*

$$R\,\mathrm{Hom}_{S/\Sigma}(\mathbb{Z}[\underline{X}], E) \simeq R\Gamma(X/\Sigma, f^*_{\mathrm{CRIS}}E); \mathrm{Ext}^i_{S/\Sigma}(\mathbb{Z}[\underline{X}], E) \simeq H^i(X/\Sigma, f^*_{\mathrm{CRIS}}E);$$
$$R\,\mathcal{H}om_{S/\Sigma}(\mathbb{Z}[\underline{X}], E) \simeq Rf_{\mathrm{CRIS}*}f^*_{\mathrm{CRIS}}E, \mathcal{E}xt^i_{S/\Sigma}(\mathbb{Z}[\underline{X}], E) \simeq f_{\mathrm{CRIS}*}f^*_{\mathrm{CRIS}}E.$$

En effet, pour tout faisceau abélien E, on a

$$\mathrm{Hom}_{S/\Sigma}(\mathbb{Z}[\underline{X}], E) \simeq \mathrm{Hom}_{(S/\Sigma)_{\mathrm{CRIS},\tau}}(\underline{X}, E) = \Gamma(X/\Sigma, E).$$

Au niveau de faisceau, on obtient

$$\mathcal{H}om_{S/\Sigma}(\mathbb{Z}[\underline{X}], E) \simeq f_{\mathrm{CRIS}*}(f^*_{\mathrm{CRIS}}E).$$

La propositon en résulte donc aussitôt.

2.2. L'objectif de cette section est de donner des moyens pour calculer les $\mathcal{E}xt^i_{S/\Sigma}(\underline{G}, E)(i = 0, 1, 2)$ lorque G est un schéma en groupes sur S. On va d'abord donner des formules valables lorsque $\tau = zar$, et puis on constate que pour certains E, les $\mathcal{E}xt^i_{S/\Sigma}(\underline{G}, E)$ ne dépendent pas de τ choisie.

Le principe des calculs est d'utliser une résolution $C(\underline{G}) \xrightarrow{\sim} \underline{G}$, telle que chaque composante $C_p(\underline{G})$ est un produit fini de groupes abéliens libres de la forme $\mathbb{Z}[G^n]$. On remarque que pour calculer $\mathcal{E}xt^i$ $(i < 3)$ il suffit de considérer une résolution partielle de longueur 3, grâce à la propositon suivante

Proposition 2.3. *Soit $C^{(3)}(\underline{G}) \to \underline{G}$ une réslution partielle de longueur 3. Alors la flèche $\tau_{\leqslant 2}R\,\mathcal{H}om_{S/\Sigma}(\underline{G}, E) \to \tau_{\leqslant 2}R\,\mathcal{H}om_{S/\Sigma}(C^{(3)}(\underline{G}), E)$ induite par la résolution $\epsilon : C^{(3)}(\underline{G}) \to G$ est un isomorphisme dans la catégorie dérivée.*

Explicitons une telle résolution $C^{(3)}(\underline{G}) \to \underline{G}$: c'est le complexe concentré en degrés $[-3, 0]$

$$\mathbb{Z}[\underline{G}^4] \times \mathbb{Z}[\underline{G}^3] \times \mathbb{Z}[\underline{G}^3] \times \mathbb{Z}[\underline{G}^2] \times \mathbb{Z}[\underline{G}] \xrightarrow{\partial_3} \mathbb{Z}[\underline{G}^3] \times \mathbb{Z}[\underline{G}^2] \xrightarrow{\partial_2} \mathbb{Z}[\underline{G}^2] \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z}[\underline{G}]$$

augmenté vers $\underline{G}$ (concentré en degré 0) par l'homorphisme canonique $\epsilon : \mathbb{Z}[\underline{G}] \to \underline{G}$. Les différentielles sont définies par les formules suivantes :

$\partial_1[x, y] = -[y] + [x + y] - [x];$

$\partial_2[x, y, z] = -[y, z] + [x + y, z] - [x, y + z] + [x, y];$

$\partial_2[x, y] = [x, y] - [y, x];$

$\partial_3[x, y, z, w] = -[y, z, w] + [x + y, z, w] - [x, y + z, w] + [x, y, z + w] - [x, y, z];$

$\partial_3[x, y, z] = -[y, z] + [x + y, z] - [x, z] - [x, y, z] + [x, z, y] - [z, x, y]$

pour le premier facteur $\mathbb{Z}[\underline{G}^3]$;

$\partial_3[x, y, z] = -[x, z] + [x, y + z] - [x, y] + [x, y, z] - [y, x, z] + [y, z, x]$

pour le second facteur $\mathbb{Z}[\underline{G}^3]$;

$\partial_3[x, y] = [x, y] + [y, x];$

$\partial_3[x] = [x, x].$

2.4. Nous fixons $\tau = zar$. Soit $C_p^{(3)}(\underline{G})$ la composante en degré $-p$ du complexe $C^{(3)}(\underline{G})$. Alors on dispose d'une suite spectrale

$$E_1^{p,q} = \mathcal{E}xt^q_{S/\Sigma}(C_p^{(3)}(\underline{G}), E) \Longrightarrow \mathcal{E}xt^{p+q}_{S/\Sigma}(C^{(3)}(\underline{G}), E).$$

Observons que $C_p^{(3)}(\underline{G})$ est une somme de facteurs $\mathbb{Z}[\underline{G}^{n_\alpha}]$, et d'après la proposition 2.1, on a

$$\mathcal{E}xt^q_{S/\Sigma}(\mathbb{Z}[\underline{G}^{n_\alpha}], E) \simeq R^q f_{n_\alpha \mathrm{CRIS}*}(f^*_{n_\alpha \mathrm{CRIS}} E),$$

où $f_{n_\alpha} : G^{n_\alpha} \to S$ est le morphisme structural. Donc cette suite spectrale se réécrit comme

$$E_1^{p,q} = \bigoplus_\alpha R^q f_{n_\alpha \mathrm{CRIS}*}(f^*_{n_\alpha \mathrm{CRIS}} E) \Longrightarrow \mathcal{E}xt^{p+q}_{S/\Sigma}(C^{(3)}(\underline{G}), E). \tag{2.4.1}$$

Supposons que $E = \mathcal{J}^{[k]}_{S/\Sigma} F$, F étant un cristal en $\mathcal{O}_{S/\Sigma}$-modules, et que pour un objet fixe (U, T, δ) de CRIS(S/Σ), il existe un T-schéma en groupes commutatif lisse H, de réduction H_U sur U, et un prolongement $i : G_U \hookrightarrow H_U$, de sorte que G_U^n s'identifie à un sous-groupe fermé de H_U^n. Notons $\mathcal{D}_{H^n}(G^n)$ l'enveloppe à puissances divisées (compatible avec γ et δ) de l'idéal de G_U^n dans H^n, et $\mathcal{F}$ le faisceau de Zariski sur T défini par F. Alors en utilisant le lemme de Poincaré cristallin, on obtient

$$R^q f_{n_\alpha \mathrm{CRIS}*}(f^*_{n_\alpha \mathrm{CRIS}} E)_{(U,T,\delta)} \simeq R^q g_{n_\alpha *}(\mathcal{J}^{[k-\cdot]}(\mathcal{F} \otimes \mathcal{D}_{H^{n_\alpha}}(G^{n_\alpha}) \otimes \Omega^\cdot_{H^{n_\alpha}/T})), \tag{2.4.2}$$

où $g_{n_\alpha} : H^{n_\alpha} \to T$ est le morphisme structural, et $\Omega^\cdot_{H^{n_\alpha}/T}$ est le complexe des différentielles. Ces considérations nous permettent de ramener les calculs de cohomologies cristallines à ceux de cohomologies de Zariski.

2.5. Supposons que G soit un schéma en groupes lisse sur S. On va calculer $\mathcal{E}xt^n_{S/\Sigma}(\underline{G}, \mathcal{J}^{[k]}_{S/\Sigma})_{(U,U)}$ pour $k \geqslant 1$ et $n \leqslant 1$. En compte tenu de (2.4.1) et (2.4.2), ces faisceaux coïncident avec les aboutissements d'une suite spectrale dont les termes initiaux sont de la forme

$$E_1^{p,q} = \bigoplus_\alpha R^q f_{n_\alpha *}(\sigma_{\geqslant k} \Omega^\cdot_{G_U^{n_\alpha}/U}),$$

où $\sigma_{\geqslant k}$ est la troncation bête. Puisque $\sigma_{\geqslant k}\Omega^\cdot_{G_U^{n_\alpha}/U}$ est concentré en degrés $\geqslant k$, on a $E_1^{p,q} = 0$ pour tout $p \geqslant 0$ et tout $q < k$. Donc lorque $k > 1$, les termes initiaux de degré total $\leqslant 1$ sont tous nuls, et on obtient

$$\mathcal{H}om_{S/\Sigma}(\underline{G}, \mathcal{J}^{[k]}_{S/\Sigma})_{(U,U)} = \mathcal{E}xt^1_{S/\Sigma}(\underline{G}, \mathcal{J}^{[k]}_{S/\Sigma})_{(U,U)} = 0$$

Lorsque $k = 1$, les arguments précédents montrent que $E_1^{0,0} = E_1^{1,0} = 0$. Par ailleurs, il est facile de voir que $E_1^{0,1} = R^1 f_*(\sigma_{\geqslant 1}\Omega^\cdot_{G_U^{n_\alpha}/U})$ (*resp.* $E_1^{1,1} = R^1 f_{2*}(\sigma_{\geqslant 1}\Omega^\cdot_{G_U^{n_\alpha}/U})$) s'identifie à l'image directe du faisceau $\Omega^1_{G_U/U, d=0}$ des formes différentielles fermées sur G_U (*resp.* l'image directe du faisceau $\Omega^1_{G_U^2/U,d=0}$). La différentielle $d_1^{0,1} : E_1^{0,1} \to E_1^{1,1}$ est donnée par

$$\omega \mapsto \omega(x+y) - \omega(x) - \omega(y).$$

Ainsi, $\mathcal{E}xt^1_{S/\Sigma}(\underline{G}, \mathcal{J}_{S/\Sigma})_{(U,U)}$ s'identifie au faisceau des formes différentielles invariantes par translation de G_U. Donc on a prouvé

Proposition 2.6. *Soit G est un S-groupe lisse. Alors pour tout S-schéma U,*

(1) $\mathcal{H}om_{S/\Sigma}(\underline{G}, \mathcal{J}^{[k]}_{S/\Sigma})_{(U,U)} = 0$ *pour* $k \geqslant 1$.

(2) *Il existe un isomorphisme canonique* $\omega_{G_U} \simeq \mathcal{E}xt^1_{S/\Sigma}(\underline{G}, \mathcal{J}_{S/\Sigma})_{(U,U)}$, *où* ω_{G_U} *est le faisceau des formes différentielles invariantes par translation de* G_U.

(3) $\mathcal{E}xt^1_{S/\Sigma}(\underline{G}, \mathcal{J}^{[k]}_{S/\Sigma})_{(U,U)} = 0$ *pour* $k > 1$.

2.7. Les calculs précédents ont été effectués lorsque $\tau = zar$, car le lemme de Poincaré cristallin a été employé. On va montrer que les $\mathcal{E}xt^i$ obtenus sont des quasi-cristaux en $\mathcal{O}_{S/\Sigma}$-modules quasi-cohérents, ont donc un sens indépendamment de la topologie τ.

Remarquons qu'on a le théorème de changement de base suivant, qui joue un rôle essentiel dans la preuve de l'indépendence de la topologie.

Théorème 2.8. *Soit*

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f'"'] & X \arrow[d, "f"] \\ U' \arrow[r, "u"] \arrow[d] & U \arrow[d] \\ T' \arrow[r, "v"] & T \end{tikzcd}$$

un diagramme commutatif de schémas, où f est quasi-compact et quasi-séparé, et $X' = X \times_U U'$. On suppose T et T' munis de PD-idéaux quasi-cohérents $(\mathcal{J}, \delta)$ et $(\mathcal{J}', \delta')$, tels que v soit un PD-morphisme, et U, U' définis par des sous-PD-idéaux de $\mathcal{J}$, $\mathcal{J}'$. Soient E un cristal de $\mathcal{O}_{X/T}$-modules quasi-cohérents, $E' = g^*_{\mathrm{CRIS}}(E)$. Pour la topologie cristalline de Zariski, il existe un morphisme de changement de base

$$Lv^*(Rf_{X/T*}(\mathcal{J}^{[k]}_{X/T}E)) \to Rf_{X'/T'*}(\mathcal{J}^{[k]}_{X'/T'}E'),$$

et c'est un isomorphisme dans chacun des cas suivants :

(1) *le morphisme f est plat d'intersection complète relative, E est plat sur $\mathcal{O}_{X/T}$, et $k = 0$;*

(2) *le morphisme f est plat d'intersection complète relative, v est plat et $U' \simeq U \times_T T'$;*

(3) *v est plat, $\mathcal{J}' = \mathcal{J}\mathcal{O}_{T'}$, et $U' \simeq U \times_T T'$.*

Pour la preuve du théorème, on utilise le lemme de Poincaré cristallin, et se ramène à prouver le fait que la formation de l'enveloppe à puissances divisées commute au changement de base dans chacun des cas précédents, et dans les cas (2) et (3), la filtration de Hodge cristalline commute aussi au changement de base.

On a aussi le théorème de changement de base pour les $\mathcal{E}xt^i$ d'un groupe :

Proposition 2.9. *Soit G un S-groupe quasi-compact et quasi-séparé. Alors pour tout diagramme catésien dans* $\mathrm{CRIS}(S/\Sigma)$

$$\begin{tikzcd} U' \arrow[r] \arrow[d, "u"'] & T' \arrow[d, "v"] \\ U \arrow[r] & T \end{tikzcd}$$

avec v plat, et tout cristal E quasi-cohérent, on a un isomorphisme canonique

$$v^*(\tau_{\leqslant 2}R\mathcal{H}om_{S/\Sigma,zar}(\underline{G},\mathcal{J}^{[k]}_{S/\Sigma}E)_{(U,T,\delta)}) = \tau_{\leqslant 2}R\mathcal{H}om_{S/\Sigma,zar}(\underline{G},\mathcal{J}^{[k]}_{S/\Sigma}E)_{(U',T',\delta')}.$$

En particulier les faisceaux $\mathcal{E}xt^i_{S/\Sigma,zar}(\underline{G},\mathcal{J}^{[k]}_{S/\Sigma}E)$ $(i\leqslant 2)$ sont des quasi-crsitaux au sens de ***1.5****.*

Pour la preuve, on remplace $\underline{G}$ par $C^{(3)}(\underline{G})$ et utilse la suite spectrale (2.4.1), et se ramène donc à prouver que les flèches de changement de base

$$v^*(Rf_{G^n_U/T*}(\mathcal{J}^{[k]}_{G^n_U/T}E)) \to Rf_{G^n_{U'}/T'*}(\mathcal{J}^{[k]}_{G^n_{U'}/T'}E|_{G^n_{U'}/T'})$$

sont des isomorphismes. Ceci résulte immédiatement du théorème 2.8.

2.10. Soient $\tau = et, fppf$ et $\alpha : \mathrm{CRIS}_{S/\Sigma,\tau} \to \mathrm{CRIS}_{S/\Sigma,zar}$ le morphisme canonique de topos cristallins. Soient G un S-groupe et F un quasi-cristal sur $\mathrm{CRIS}(S/\Sigma)$ au language de **1.5**. Alors on a un isomorphisme dans la catégorie dérivée de groupes abéliens

$$R\,\mathrm{Hom}_{S/\Sigma,\tau}(\underline{G},F)\tilde{\to}R\,\mathrm{Hom}_{S/\Sigma,zar}(\underline{G},R\alpha_*F) = R\,\mathrm{Hom}_{S/\Sigma,zar}(\underline{G},F),$$

où on a utilsé la propostion 1.6 pour voir que $R\alpha_*F\simeq F$.

Soit E un cristal quasi-cohérent. Alors $\mathcal{J}^{[k]}_{S/\Sigma}E$ est un quasi-cristal pour $k\geqslant 0$. Les arguments précédents montrent que les groupes $\mathrm{Ext}^i_{S/\Sigma,\tau}(\underline{G},\mathcal{J}^{[k]}_{S/\Sigma}E)$ coïncident avec $\mathrm{Ext}^i_{S/\Sigma,zar}(\underline{G},\mathcal{J}^{[k]}_{S/\Sigma}E)$ pour tout $i\geqslant 0$. Pour un i fixe, les $\mathcal{E}xt^i_{S/\Sigma,\tau}$ et $\mathcal{E}xt^i_{S/\Sigma,zar}$ sont les faisceaux associés, pour les topologies correspondantes, au même préfaisceau

$$(U,T,\delta)\mapsto \mathrm{Ext}^i_{U/T}(\underline{G}_U,\mathcal{J}^{[k]}_{U/T}E|_{(U/T)_{\mathrm{CRIS}}}).$$

Lorsque G est quasi-compact quasi-séparé, en vue de la proposition 2.9, on voit que les $\mathcal{E}xt^i_{S/\Sigma,zar}(\underline{G},\mathcal{J}^{[k]}_{S/\Sigma}E)$ $(i\leqslant 2)$ sont égaux aux $\mathcal{E}xt^i_{S/\Sigma}$ calculés pour la topologie τ. En résumé, on a prouvé

Proposition 2.11. *Soient $\tau = zar, et, fppf$, E un cristal quasi-cohérent sur $\mathrm{CRIS}(S/\Sigma)$, et G un schéma en groupes sur S quasi-compact et quasi-séparé. Alors*

(1) *pour tout i, les groupes $\mathrm{Ext}^i_{S/\Sigma,\tau}(\underline{G},\mathcal{J}^{[k]}_{S/\Sigma}E)$ sont indépendents de la topologie τ ;*

(2) *pour $i\leqslant 2$, les préfaisceaux sous-jacents aux $\mathcal{E}xt^i_{S/\Sigma,\tau}(\underline{G},\mathcal{J}^{[k]}_{S/\Sigma}E)$ coïncident pour toutes les topologies différentes.*

Les discussions précédentes s'appliquent, de façon analogue et plus élémentaire, aux $\mathcal{E}xt^i_{S_{zar,\gamma}}(G,M)$, où M est un module quasi-cohérent de S_{zar} et commute au changement de base plat. Alors on obtient que pour tout S-schéma U, les $\mathcal{E}xt^i_{S_{zar,\gamma}}(G,M)_U$ commutent au changement de base plat, et sont donc égaux $\mathcal{E}xt^i$ calculés pour les topologies et et $fppf$.

Proposition 2.12. *Soient $\tau = zar, et, fppf$, G un S-groupe quasi-compact quasi-séparé. Alors*

(1) *les préfaisceaux sous-jacents aux $\mathcal{E}xt^i_{S_{\gamma,\tau}}(G,\mathbb{G}_a)$ coïncidnet pour les topologies différentes ;*

(2) *il existe un isomorphisme canonique*

$$\mathcal{E}xt^i_{S/\Sigma,\tau}(\underline{G},\underline{\mathbb{G}}_a)\tilde{\to}i_{S/\Sigma*}(\mathcal{E}xt^i_{S_{\gamma,\tau}}(G,\mathbb{G}_a)).$$

Pour la preuve de (2), on peut supposer $\tau = zar$, de sorte que $Ri_{S/\Sigma *} = i_{S/\Sigma *}$. Comme $i^*_{S/\Sigma}\underline{G} = G$, l'isomorphisme dans (2) s'identifie à l'isomorphisme d'adjonction entre $i^*_{S/\Sigma}$ et $i_{S/\Sigma *}$.

3. Cas des groupes p-divisibles

Les S et Σ sont comme plus haut. Rappelons d'abord le lemme suivant pour passage à la limite projective de faisceaux.

Lemme 3.1. *Soient $\tau = zar, et, fppf$, et $\mathcal{F}_\bullet$ un système projectif, indexé par $\mathbb{N}$, de quasi-cristaux en $\mathcal{O}_{S/\Sigma}$-modules quasi-cohérents (ref.* ***1.5****). Alors*

(1) *$R^i \varprojlim \mathcal{F}_\bullet = 0$ pour $i \geqslant 2$, où $R^i \varprojlim$ sont les foncteurs dérivés de $\varprojlim$ dans la catégorie dérivée de faisceaux abéliens sur* $(\mathrm{CRIS})_{S/\Sigma,\tau}$

(2) *si $\mathcal{F}_\bullet$ satisfait localement à la condition de Mittag-Leffler, alors $\mathcal{F}_\bullet$ est $\varprojlim$-acyclique.*

Considérons maintenant un groupe p-divisible G sur S et notons $G(n)$ le groupe fini localement libre, noyau de p^n_G.

Lemme 3.2. *Fixons $\tau = fppf$ et des entiers $k \geqslant 1$, $q \geqslant 0$. Pour tout faisceau abélien E de $(S/\Sigma)_{\mathrm{CRIS},\tau}$ annulé par p^k, le système projectif $\mathcal{E}xt^q_{S/\Sigma,\tau}(G(n), E)$ indexé par $n \in \mathbb{N}$, vérifie la condition de Mittag-Leffler.*

Démonstration. Compte tenu de la proposition 1.3, on a une suite exacte

$$0 \to \underline{G}(n) \to \underline{G} \xrightarrow{p^n} \underline{G} \to 0.$$

qui définit une suite exacte longue

$$\to \mathcal{E}xt^q_{S/\Sigma,\tau}(\underline{G}, E) \xrightarrow{p^n} \mathcal{E}xt^q_{S/\Sigma,\tau}(\underline{G}, E) \to \mathcal{E}xt^q_{S/\Sigma,\tau}(\underline{G}(n), E) \to \mathcal{E}xt^{q+1}_{S/\Sigma,\tau}(\underline{G}, E) \xrightarrow{p^n} .$$

Le faisceau E étant annulé par p^k, la flèche $p^n : \mathcal{E}xt^q_{S/\Sigma,\tau}(\underline{G}, E) \to \mathcal{E}xt^q_{S/\Sigma,\tau}(\underline{G}, E)$ est nulle pour tout $n \geqslant k$. On obtient donc pour $m, n \geqslant k$ un diagramme de suites exactes

(3.2.1)
$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{E}xt^q_{S/\Sigma,\tau}(\underline{G}, E) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathcal{E}xt^q_{S/\Sigma,\tau}(\underline{G}(n+m), E) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{E}xt^{q+1}_{S/\Sigma,\tau}(\underline{G}, E) \arrow[r] \arrow[d, "p^m=0"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{E}xt^q_{S/\Sigma,\tau}(\underline{G}, E) \arrow[r] & \mathcal{E}xt^q_{S/\Sigma,\tau}(\underline{G}(n), E) \arrow[r] & \mathcal{E}xt^{q+1}_{S/\Sigma,\tau}(\underline{G}, E) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

induit par le diagramme

(3.2.2)
$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \underline{G}(n) \arrow[r] \arrow[d] & \underline{G} \arrow[r, "p^n"] \arrow[d, equal] & \underline{G} \arrow[r] \arrow[d, "p^m"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \underline{G}(n+m) \arrow[r] & \underline{G} \arrow[r, "p^{n+m}"] & \underline{G} \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

On voit immédiatement que l'image de $\mathcal{E}xt^q_{S/\Sigma,\tau}(\underline{G}(n+m), E)$ dans $\mathcal{E}xt^q_{S/\Sigma,\tau}(\underline{G}(n), E)$ est constante pour $m, n \geqslant k$ de valeur $\mathcal{E}xt^q_{S/\Sigma,\tau}(\underline{G}, E)$. $\square$

Proposition 3.3. *Soient $\tau = zar, et, fppf$, E un cristal quasi-cohérent et G un groupe p-divisible sur S. Alors pour tout $q \leqslant 2$*

(1)*les préfaisceaux sous-jacents aux faisceaux $\mathcal{E}xt^q_{S/\Sigma,\tau}(\underline{G}, \mathcal{J}^{[k]}_{S/\Sigma}E)$ sont indépendants de la topologie τ ;*

(2) $\mathcal{E}xt^q_{S/\Sigma}(\underline{G}, \mathcal{J}^{[k]}_{S/\Sigma}E) = \varprojlim \mathcal{E}xt^q_{S/\Sigma}(\underline{G}(n), \mathcal{J}^{[k]}_{S/\Sigma}E)$;

(3) *pour un objet $(U,T,\delta) \in \mathrm{CRIS}(S/\Sigma)$ tel que $p^\ell = 0$ sur T, les $\mathcal{O}_T$-modules $\mathcal{E}xt^q_{S/\Sigma}(\underline{G}, \mathcal{J}^{[k]}_{S/\Sigma}E)_{(U,T,\delta)}$ sont quasi-cohérents, et s'envoient injectivement dans les $\mathcal{E}xt^q_{S/\Sigma}(\underline{G}(n), \mathcal{J}^{[k]}_{S/\Sigma}E)_{(U,T,\delta)}$ pour $n \geqslant \ell$.*

Supposons d'abord $\tau = fppf$. Alors, pour $k \geqslant 0$ et $q \leqslant 2$, le système projectif $\mathcal{E}xt^q_{S/\Sigma,\tau}(G(n), \mathcal{J}^{[k]}_{S/\Sigma}E)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie localement la condition de Mittag-Leffler d'après le lemme 3.2, et donc est $\varprojlim$-acyclique en vertu des propositions 2.9, 2.11 et du lemme 3.1. D'autre part, on dispose d'une suite spectrale

$$E_2^{p,q} = R^p \varprojlim \mathcal{E}xt^q_{S/\Sigma,\tau}(\underline{G}(n), \mathcal{J}^{[k]}_{S/\Sigma}E) \Longrightarrow \mathcal{E}xt^{p+q}_{S/\Sigma,\tau}(\underline{G}, \mathcal{J}^{[k]}_{S/\Sigma}E).$$

Les nullités des $E_2^{p,q}$ pour $q \leqslant 2$ et $p \geqslant 1$ entrainent

$$\mathcal{E}xt^q_{S/\Sigma,\tau}(\underline{G}, \mathcal{J}^{[k]}_{S/\Sigma}E) \simeq \varprojlim \mathcal{E}xt^q_{S/\Sigma,\tau}(\underline{G}(n), \mathcal{J}^{[k]}_{S/\Sigma}E),$$

pour $q \leqslant 2$. Ceci prouve (2) lorsque $\tau = fppf$.

Soit (U,T,δ) un objet dans $\mathrm{CRIS}(S/\Sigma)$, tel que $p^\ell = 0$ sur T. D'après la preuve du lemme 3.2, on voit que pour tout $n, m \geqslant \ell$ l'image de $\mathcal{E}xt^q_{S/\Sigma,\tau}(\underline{G}(n+m), \mathcal{J}^{[k]}_{S/\Sigma}E)_{(U,T,\delta)}$ par le morphisme canonique dans $\mathcal{E}xt^q_{S/\Sigma,\tau}(\underline{G}(n), \mathcal{J}^{[k]}_{S/\Sigma}E)_{(U,T,\delta)}$ s'identifie à $\mathcal{E}xt^q_{S/\Sigma,\tau}(\underline{G}, \mathcal{J}^{[k]}_{S/\Sigma}E)_{(U,T,\delta)}$. Il en résulte rapidement que les $\mathcal{E}xt^q_{S/\Sigma,\tau}(\underline{G}, \mathcal{J}^{[k]}_{S/\Sigma}E)$ pour $q \leqslant 2$ sont des quasi-cristaux au sens de **1.5**, comme les $\mathcal{E}xt^q_{S/\Sigma,\tau}(\underline{G}(n), \mathcal{J}^{[k]}_{S/\Sigma}E)(q \leqslant 2)$ les sont (ref. 2.9). Appliquant les arguments de **2.9**, on voit que les $\mathcal{E}xt^q_{S/\Sigma,\tau}(\underline{G}, \mathcal{J}^{[k]}_{S/\Sigma}E)$ sont indépendants de la topologie τ. Ceci prouve (1) de la proposition, et d'où les assertions (2) et (3) suivent d'après ce qui précède.

4. Cristal de Dieudonné d'un schéma abélien

Les S et Σ sont comme plus avant, soit $f : A \to S$ un schéma abélien de dimension relative n. On notera $\mathcal{H}^i_{dR}(A/S)$ le i-ème faisceau de cohomologie de de Rham $R^i f_*(\Omega^\cdot_{A/S})$. La structure de groupe sur A induit des structures d'algèbres de Hopf sur $\mathcal{H}^*_{dR}(A/S) = \bigoplus_{i\geqslant 0} \mathcal{H}^i_{dR}(A/S)$ et $R^*f_*(\mathcal{O}_A) = \bigoplus_{i\geqslant 0} R^i f_*(\mathcal{O}_A)$. On utilisera la notation $\mathcal{H}^*(A/S)$ pour désigner l'une de ces deux algèbres de Hopf. Par ailleurs on notera $\wedge(M)$, pour tout module M sur un anneau R, l'algèbre extérieure de M. On remarque qu'il existe une structure canonique d'algèbre de Hopf sur $\wedge(M)$, pour laquelle la comultiplication sur M est l'application diagonale.

Rappelons les résultats suivants classiques sur les schémas abéliens :

Proposition 4.1. (1) *Pour tout $i \geqslant 0$ (*resp. *$p, q \geqslant 0$), les faisceaux $\mathcal{H}^i_{dR}(A/S)$ (*resp. *$R^q f_*(\Omega^p_{A/S})$) sont localement libres sur S et leur formation commute à tout changement de base sur S.*

(2) *L'algèbre $\mathcal{H}^*(A/S)$ est alternée, et le morphisme canonique d'algèbres*

$$\wedge\mathcal{H}^1(A/S) \to \mathcal{H}^*(A/S),$$

défini par la structure multiplicative de $\mathcal{H}^*(A/S)$, est un isomorphisme, et compatible aux structures d'algèbre de Hopf.

(3) *La suite spectrale de Hodge-de Rham*

$$E_1^{p,q} = R^q f_*(\Omega^p_{A/S}) \Longrightarrow \mathcal{H}^{p+q}_{dR}(A/S)$$

dégénère en E_1.

Remarque 4.1.1. Notons $\omega_A = e^*(\Omega^1_{A/S}) = f_*(\Omega^1_{A/S})$, où e est la section unité de A. Alors d'après (3), la filtration de Hodge en degré 1 s'écrit comme

$$0 \to \omega_A \to \mathcal{H}_{dR}(A/S) \to R^1 f_*\mathcal{O}_A \to 0, \tag{4.1.1}$$

la formation de cette suite exacte commute a tout changement de base.

Au niveau de cohomologie cristalline, le module gradué $R^* f_{\mathrm{CRIS}*}(\mathcal{O}_{A/\Sigma}) = \bigoplus_{i\geqslant 0} R^i f_{\mathrm{CRIS}*}(\mathcal{O}_{A/\Sigma})$ est muni d'une structure d'algèbre de Hopf. Plus précisément, on a

Corollaire 4.2. *Soit $f : A \to S$ un schéma abélien de dimension relative n. Alors $R^1 f_{\mathrm{CRIS}*}(\mathcal{O}_{A/\Sigma})$ est un cristal en $\mathcal{O}_{S/\Sigma}$-modules quasi-cohérents, localement libre de rang $2n$. De plus l'algèbre $R^* f_{\mathrm{CRIS}*}(\mathcal{O}_{A/\Sigma})$ est alternée, et le morphisme canonique*

$$\wedge R^1 f_{\mathrm{CRIS}*}(\mathcal{O}_{A/\Sigma}) \to R^* f_{\mathrm{CRIS}*}(\mathcal{O}_{A/\Sigma}),$$

est un isomorphisme d'algèbre de Hopf.

Pour la preuve du corollaire, remarquons que pour tout objet (U, T, δ) de $\mathrm{CRIS}(S/\Sigma)$, le schéma abélien $A_U = A \times_S U$ sur U se relève en un schéma abélien $f' : A' \to T$. Par le lemme cristallin de Poincaré, on a donc

$$R^* f_{\mathrm{CRIS}*}(\mathcal{O}_{A/\Sigma})_{(U,T,\delta)} \tilde{\to} R^* f'_*(\Omega^{\cdot}_{A'/T}) = \mathcal{H}^*_{dR}(A'/T).$$

Le corollaire se déroule immédiatement de la proposition 4.1.

Le corollaire 4.2 nous permet de calculer les faisceaux $\mathcal{E}xt^q(\underline{A}, \mathcal{O}_{S/\Sigma})$.

Théorème 4.3. *Soit $f : A \to S$ un schéma abélien de dimension relative n. Alors*

(1) $\mathcal{H}om_{S/\Sigma}(\underline{A}, \mathcal{O}_{S/\Sigma}) = \mathcal{E}xt^2_{S/\Sigma}(\underline{A}, \mathcal{O}_{S/\Sigma}) = 0$ *;*

(2) $\mathcal{E}xt^1_{S/\Sigma}(\underline{A}, \mathcal{O}_{S/\Sigma}) \simeq R^1 f_{\mathrm{CRIS}*}(\mathcal{O}_{A/\Sigma})$*, et est donc un cristal en $\mathcal{O}_{S/\Sigma}$-modules localement libre de rang $2n$.*

On remplace $\underline{A}$ par $C^{(3)}(\underline{A})$, et utilise la suite spectrale (2.4.1) pour calculer les $\mathcal{E}xt^i_{S/\Sigma}$. Puisque $R^0 f_{\mathrm{CRIS}*}(\mathcal{O}_{A/\Sigma}) = \mathcal{O}_{S/\Sigma}$, il est facile de vérifier que le complexe $(E_1^{\cdot,0}, d_1^{\cdot,0})$ s'écrit comme suit

$$\mathcal{O}_{S/\Sigma} \xrightarrow{Id} \mathcal{O}_{S/\Sigma} \to (\mathcal{O}_{S/\Sigma})^2 \xrightarrow{d} (\mathcal{O}_{S/\Sigma})^5,$$

où d est défini par $d(f,g) = (f, f+g, -f+g, -2g, -g)$. On en déduit immédiatement $E_2^{p,0} = 0$ pour $p \leqslant 2$.

La formule de Künneth entraîne que

$$R^1 f_{n_\alpha \mathrm{CRIS}*}(\mathcal{O}_{A^{n_\alpha}/\Sigma}) = \bigoplus_{n_\alpha} R^1 f_{\mathrm{CRIS}*}(\mathcal{O}_{A/\Sigma})$$

et la loi de groupe induit la comultiplication sur l'algèbre de Hopf $R^*f_{\mathrm{CRIS}*}(\mathcal{O}_{A/\Sigma})$, qui est l'application diagonale sur $M := R^1f_{\mathrm{CRIS}*}(\mathcal{O}_{A/\Sigma})$ par le corollaire 4.2. Donc le complexe $(E_1^{\cdot,1}, d_1^{\cdot,1})$ s'écrit

$$M \xrightarrow{0} M^2 \xrightarrow{(\partial^1,\partial^2)} M^3 \oplus M^2 \longrightarrow \cdots,$$

où $\partial^1 : M^2 \to M^3$ est défini par $\partial^1(m_1, m_2) = (-m_1, 0, m_2)$. Donc on en déduit $E_2^{0,1} = R^1f_{\mathrm{CRIS}*}(\mathcal{O}_{A/\Sigma})$ et $E_2^{1,1} = 0$.

Enfin, désignons par p_i (*resp.* μ) la ième projection (*resp.* la loi de groupe). On vérifie que le morphisme

$$d_1^{0,2} : R^2f_{\mathrm{CRIS}*}(\mathcal{O}_{A/\Sigma}) \xrightarrow{p_1^*+p_2^*-\mu^*} R^1f_{2\mathrm{CRIS}*}(\mathcal{O}_{A^2/\Sigma})$$

est injectif, de sorte que $E_2^{0,2} = 0$. Le théorème en résulte tout de suite.

Définition 4.4. Supposons $\Sigma = \operatorname{Spec}\mathbb{Z}_p$, $\mathcal{J} = p\cdot\mathcal{O}_\Sigma$, muni de la structure canonique à puissances divisées , et que S soit un schéma de caractéristique p. Soit A un schéma abélien sur S, le cristal $\mathcal{E}xt^1_{S/\Sigma}(\underline{A}, \mathcal{O}_{S/\Sigma})$ sera noté $\mathbb{D}(A)$, et appelé le *cristal de Dieudonné de A*.

Proposition 4.5. *Soit $f : A \to S$ un schéma abélien. Alors*

(1) $\mathcal{E}xt^i_{S/\Sigma}(\underline{A}, \mathcal{J}_{S/\Sigma}) = \mathcal{E}xt^i_{S/\Sigma}(\underline{A}, \mathbb{G}_a) = 0$ *pour* $i = 0, 2$ *;*

(2) *la suite exacte*

$$0 \to \mathcal{J}_{S/\Sigma} \to \mathcal{O}_{S/\Sigma} \to \underline{\mathbb{G}}_a \to 0$$

induit un diagramme commutatif à lignes exactes

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{E}xt^1_{S/\Sigma}(\underline{A}, \mathcal{J}_{S/\Sigma})_S \arrow[r, "\phi"] \arrow[d] & \mathcal{E}xt^1_{S/\Sigma}(\underline{A}, \mathcal{O}_{S/\Sigma})_S \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d] & \mathcal{E}xt^1_{S/\Sigma}(\underline{A}, \underline{\mathbb{G}}_a)_S \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & R^1f_{\mathrm{CRIS}*}(\mathcal{J}_{A/S})_S \arrow[r, "\theta"] & R^1f_{\mathrm{CRIS}*}(\mathcal{O}_{A/S})_S \arrow[r] & R^1f_{\mathrm{CRIS}*}(\underline{\mathbb{G}}_{aA})_S \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \omega_A \arrow[r] \arrow[u] & \mathcal{H}^1_{dR}(A/S) \arrow[r] \arrow[u] & R^1f_*(\mathcal{O}_A) \arrow[r] \arrow[u] & 0,
\end{tikzcd}$$

où les flèches verticales sont des isomorphismes et la ligne en bas est la suite exacte (4.1.1).

Remarquons d'abord que $R^1f_*(\mathcal{O}_A)$ s'identifie au faisceau tangent à $\hat{A}$, le schéma abélien dual de A, le long de la section unité. Donc la suite exacte (4.1.1) s'écrit encore

$$0 \to \omega_A \to \mathbb{D}(A)_S \to \mathcal{L}ie(\hat{A}) \to 0,$$

où $\mathcal{L}ie(\hat{A})$ désigne l'algèbre de Lie de $\hat{A}$.

Prouvons maintenant la propositon 4.5. D'après la propositon 4.1 (2), l'algèbre $R^*f_*(\mathcal{O}_A)$ s'identifie à $\wedge R^1f_*(\mathcal{O}_A)$. Par les raisonnements analogues que ceux du théorème 4.3 , on obtient

(i) $\mathcal{E}xt^i_{S_\gamma}(\underline{A}, \mathbb{G}_a) = 0$ pour $i = 0, 2$;

(ii) $\mathcal{E}xt^1_{S_\gamma}(\underline{A}, \mathbb{G}_a) \simeq R^1f_*(\mathcal{O}_A)$.

D'après 2.12, il en résulte donc la nullité des $\mathcal{E}xt^i_{S/\Sigma}(\underline{A}, \underline{\mathbb{G}}_a)$ pour $i = 0, 2$, et les isomorphismes

$$\mathcal{E}xt^1_{S/\Sigma}(\underline{A}, \underline{\mathbb{G}}_a)_S \xrightarrow{\sim} R^1f_{\mathrm{CRIS}*}(\underline{\mathbb{G}}_{aA})_S \xleftarrow{\sim} R^1f_*(\mathcal{O}_A).$$

Maintenant l'injectivité de ϕ et la surjectivité de φ dans le diagramme de (2) deviennent évidentes d'après ce qui précède et la suite exacte 4.1.1. Par ailleurs, comme $R^0 f_{\mathrm{CRIS}*}(\mathcal{O}_{A/S})_S \tilde{\rightarrow} R^0 f_{\mathrm{CRIS}*}(\underline{\mathbb{G}}_{aA})_S$ $\mathcal{O}_S$, il en résulte l'injectivité du morphisme θ. La commutivité du diagramme entraîne alors que

$$\mathcal{E}xt^1_{S/\Sigma}(\underline{A}, \mathcal{J}_{S/\Sigma})_S \tilde{\rightarrow} R^1 f_{\mathrm{CRIS}*}(\mathcal{J}_{A/S})_S \tilde{\leftarrow} \omega_A.$$

Ceci prouve la partie (2) de la propositon 4.5.

La nullité de $\mathcal{H}om_{S/\Sigma}(\underline{A}, \mathcal{J}_{S/\Sigma})$ étant claire, il reste à prouver $\mathcal{E}xt^2_{S/\Sigma}(\underline{A}, \mathcal{J}_{S/\Sigma}) = 0$. Pour tout objet (U, T, δ) de $\mathrm{CRIS}(S/\Sigma)$, on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{E}xt^1_{S/\Sigma}(\underline{A}, \mathcal{O}_{S/\Sigma})_{(U,T,\delta)} \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta_1"] & \mathcal{E}xt^1_{S/\Sigma}(\underline{A}, \underline{\mathbb{G}}_a)_{(U,T,\delta)} \arrow[d, "\beta_2"] \\
\mathcal{E}xt^1_{S/\Sigma}(\underline{A}, \mathcal{O}_{S/\Sigma})_{(U,U)} \arrow[r, "\beta_3"] & \mathcal{E}xt^1_{S/\Sigma}(\underline{A}, \underline{\mathbb{G}}_a)_{(U,U)}.
\end{tikzcd}$$

Puisque $\mathcal{E}xt^1_{S/\Sigma}(\underline{A}, \mathcal{O}_{S/\Sigma})$ est un cristal, β_1 est surjectif, et la partie (2) de la propositon entraîne la suijectivité de β_3. Enfin d'après la proposition 2.12, on sait que β_2 est un isomorphisme, et il en résulte donc que α est surjectif. Ceci entraîne immédiatement la nullité de $\mathcal{E}xt^2_{S/\Sigma}(\underline{A}, \mathcal{J}_{S/\Sigma})$.

Références

[BBM] , F. Berthelot, L. Breen and W. Messing ; *Théorie de Dieudonné Cristalline II*, Lecture notes in Math. **930**, Springer-Verlag, 1982.